Série TD4 : Travaux dirigés

Exercice 1

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes

1- $\frac{1}{X^3-X}$ 2- $\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$ 3- $\frac{X^3}{(X-1)(X-2)(X-3)}$

4- $\frac{2X^2+1}{(X^2-1)^2}$ 5- $\frac{X^3+1}{(X-1)^3}$ 6- $\frac{X^4+1}{(X+1)^3(X^2-1)}$

1- Décomposition en éléments simples la fraction rationnelle : $\frac{1}{X^3-X}$

la partie entière $E(X)$ est nulle. on a $X^3-X = X(X-1)(X+1)$

donc $\frac{1}{X^3-X} = \frac{A}{X} + \frac{B}{X-1} + \frac{C}{X+1}$

$X\ \frac{1}{X^3-X} = A + \frac{BX}{X-1} + \frac{CX}{X+1}$ ce qui donne

$\frac{1}{(X+1)(X-1)} = A + \frac{BX}{X-1} + \frac{CX}{X+1}$

Et pour $X=0$, on obtient $A=-1$

$(X-1)\frac{1}{X^3-X} = \frac{A(X-1)}{X} + B + \frac{C(X-1)}{X+1}$ ce qui donne

$\frac{1}{X(X+1)} = \frac{A(X-1)}{X} + B + \frac{C(X-1)}{X+1}$

Et pour $X=1$, on obtient $B=\frac{1}{2}$.

$(X+1)\frac{1}{X^3-X} = \frac{A(X+1)}{X} + \frac{B(X+1)}{X-1} + C$ ce qui donne

$\frac{1}{X(X-1)} = \frac{A(X+1)}{X} + \frac{B(X+1)}{X-1} + C$

Et pour $X=-1$ on obtient $C=-\frac{1}{2}$.

donc $\frac{1}{X^3-X} = \frac{-1}{X} + \frac{\frac{1}{2}}{X-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{X+1}$

Scanné avec CamScanner

2- Décomposons en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$$

si on pose $A = X^2+2X+5$ et $B = X^2-3X+2$ on a $\deg(A) = \deg(B)$

donc $E(X) = 1$ (ou bien par division euclidienne de A par B

et $X^2-3X+2 = (X-1)(X-2)$

Donc $\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2} = 1 + \frac{A}{X-1} + \frac{B}{X-2}$

$(X-1)\frac{(X^2+2X+5)}{(X-1)(X-2)} = (X-1) + A + B\frac{(\alpha-1)}{\alpha-2}$ ce qui donne

$\frac{X^2+2X+5}{X-2} = (\alpha-1) + A + \frac{B(X-1)}{X-2}$. Pour $X=1$ on trouve $A=-8$

$(X-2)\cdot\frac{X^2+2X+5}{(X-1)(X-2)} = (X-2) + \frac{A(X-2)}{X-1} + B$ Pour $\alpha = 2$

on trouve que $B = 13$ donc $\frac{X^2+2X+5}{(X-1)(X-2)} = 1 - \frac{8}{X-1} + \frac{13}{X-2}$.

3- Décomposons en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{X^3}{(X-1)(X-2)(X-3)}$$

$E(X) = 1$ donc $\frac{X^3}{(X-1)(X-2)(X-3)} = 1 + \frac{A}{X-1} + \frac{B}{X-2} + \frac{C}{X-3}$ (*)

En multipliant (*) à chaque fois par $(X-1)$, $(X-2)$, $(X-3)$ et en remplaçant X à chaque fois par 1, 2, 3 on trouve que

$A = \frac{1}{2}$, $B = -8$ et $C = \frac{27}{2}$ d'où

$$\frac{X^3}{(X-1)(X-2)(X-3)} = 1 + \frac{1/2}{X-1} - \frac{8}{X-2} + \frac{27/2}{X-3}$$

4- Décomposons en éléments simples la fraction rationnelle

$$F = \frac{2X^2+1}{(X^2-1)^2}$$

on a $(X^2-1)^2 = (X-1)^2(X+1)^2$ avec 1 et -1 comme racines doubles

Pour faciliter la décomposition en éléments simples de $\frac{2X^2+1}{(X^2-1)^2}$

Scanné avec CamScanner

on cherche d'abord la partie polaire relative à -1

on écrit $F = \frac{A}{X+1} + \frac{B}{(X+1)^2} + G(X)$ où G est une fraction rationnelle n'admettant pas -1 comme pôle.

$(X+1)^2 F = (X+1)A + B + (X+1)^2 G(X)$ d'où

$\frac{2X^2+1}{(X-1)^2} = (X+1)A + B + (X+1)^2 G(X)$ et pour $X = -1$

on trouve $B = \frac{3}{4}$.

on calcul $F - \frac{3/4}{(X+1)^2} = \frac{2X^2+1}{(X-1)^2} - \frac{\frac{3}{4}(X-1)^2}{(X+1)^2(X-1)^2}$

$= \frac{\frac{5}{4}X^2 + \frac{3}{2}X + \frac{1}{4}}{(X-1)^2(X+1)^2} = \frac{A}{X+1} + G(X)$

$= \frac{\frac{5}{4}(X+1)(X+\frac{1}{5})}{(X-1)^2(X+1)^2} = \frac{A}{X+1} + G(X)$

$= \frac{\frac{5}{4}(X+\frac{1}{5})}{(X+1)(X-1)^2} = \frac{A}{X+1} + G(X)$

$(X+1)\frac{\frac{5}{4}(X+\frac{1}{5})}{(X+1)(X-1)^2} = (X+1)\frac{A}{X+1} + (X+1)G(X)$ d'où

$\frac{\frac{5}{4}(X+\frac{1}{5})}{(X-1)^2} = A + (X+1)G(X)$ Et pour $X = -1$ on trouve que

$A = \frac{-1}{4}$.

Pour étudier la partie polaire relative à 1 on calcul

$\frac{\frac{5}{4}(X^2+3X+2)}{(X+1)(X-1)^2} + \frac{1/4}{X+1} = G(X) = \frac{C}{X-1} + \frac{D}{(X-1)^2}$

donc on cherche C et D pour que $\frac{\frac{1}{4}[(5X+1)+(X-1)^2]}{(X+1)(X-1)^2} = \frac{C}{X-1} + \frac{D}{(X-1)^2}$

d'où $\frac{1/4(X^2+3X+2)}{(X+1)(X-1)^2} = \frac{C}{X-1} + \frac{D}{(X-1)^2}$

Scanné avec CamScanner

• $(x-1)^2 \dfrac{1/4\,(x^2+3x+2)}{(x+1)(x-1)^2} = C(x-1)+D$.

donc $\dfrac{\frac{1}{4}(x+2)}{1} = C(x-1)+D$ et pour $x=1$ on trouve que $D=\dfrac{3}{4}$.

on calcule $\dfrac{\frac{1}{4}(x+2)}{(x-1)^2} - \dfrac{\frac{3}{4}}{(x-1)^2} = \dfrac{C}{x-1}$

d'où $\dfrac{\frac{1}{4}(x-1)}{(x-1)^2} = \dfrac{C}{x-1}$ donc $C=\dfrac{1}{4}$.

Par conséquent : $\dfrac{2x^2+1}{(x-1)^2(x+1)^2} = \dfrac{-1/4}{(x+1)} + \dfrac{3/4}{(x+1)^2} + \dfrac{1/4}{(x-1)} + \dfrac{3/4}{(x-1)^2}$

Remarque: on veut remarqué que la fraction F est paire, peut en déduire que $C=-A$ et $D=B$

5- Décomposons en éléments simples la fraction rationnelle:

$$F = \frac{X^3+1}{(X-1)^3}$$

ona $E(X)=1$, car $\deg(X^3+1) = \deg((X-1)^3)$.

on écrit donc F sous la forme

$$F = 1 + \frac{A}{X-1} + \frac{B}{(X-1)^2} + \frac{C}{(X-1)^3}$$

. on multiplit par $(X-1)^3$ dans (*) on trouve que

$3X = (X-1)A + B$ pour $x=1$ ona $B=3$

. on calcule $\dfrac{3X}{(X-1)^3} - \dfrac{3}{(X-1)^2} = \dfrac{A}{X-1}$ on trouve

$\dfrac{3}{X-1} = \dfrac{A}{X-1}$ soit alors $A=3$

d'où $F = 1 + \dfrac{3}{X-1} + \dfrac{3}{(X-1)^2} + \dfrac{2}{(X-1)^3}$

6- Décomposons en éléments simples, la fraction rationnelle :

$$F = \frac{X^4+1}{(X+1)^2(X^2+1)}$$

Les pôles sont $-1, i$ et $-i$. La fraction rationnelle F étant à coefficients

Scanné avec CamScanner

réels, les parties polaires sont conjuguées.

d'où $F = 1 + \frac{A}{X+1} + \frac{B}{(X+1)^2} + \frac{C}{X-i} + \frac{\bar{C}}{X+i}$

On multiplie par $(X-i)$ et on évalue en $X=i$. On trouve

$$\bar{C} = \frac{i+1}{(i+i)(i+1)^2} = \frac{1+i}{2i(1+i)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

d'où $C = -\frac{1}{2}$

On multiplie par $(X+1)^2$ et on remplace par -1, on trouve

$$B = \frac{1+1}{1+1} = 1$$

On calcule $F - \frac{1}{(X+1)^2} = 1 + \frac{A}{X+1} + \frac{-1/2}{X-i} + \frac{-1/2}{X+i}$

On trouve : $\frac{X^4-X^2}{(X+1)^2(X^2+1)} = \frac{X^2(X^2-1)}{(X+1)(X^2+1)} = 1 + \frac{A}{X+1} - \frac{1/2}{X-i} - \frac{1/2}{X+i}$

On multiplie par $(X+1)$.

$$\frac{X^2(X-1)}{X^2+1} = (X+1) + A - \frac{1/2(X+1)}{X-i} - \frac{1/2(X+1)}{X+i}$$

on remplace par -1 : $A = -1$

donc $F = 1 - \frac{1}{X+1} + \frac{1}{(X+1)^2} - \frac{1/2}{X+i} - \frac{1/2}{X-i}$

Exercice 2

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes

$$1 - \frac{1}{X^n-1} \qquad 2 - \frac{X^{n-1}}{X^n-1} \qquad 3 - \frac{1}{(X-1)(X^n-1)}$$

1 - on pose $F = \frac{1}{X^n-1} = \frac{P}{Q}$

ona. Les pôles de F sont les racines n-ième de l'unité sont les complexes $\alpha_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ / $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Tous les pôles sont simples, et la partie polaire de chaque α_k est de la forme $\frac{C_k}{X - C_k}$ où $C_k = \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}$ car ici P et Q sont premiers entre eux (fraction irréductible).

Donc $C_k = \frac{1}{n X_k^{n-1}} = \frac{1}{n\left(\frac{X_k^n}{X_k}\right)} = \frac{X_k}{n \cdot 1} = \frac{e^{2i\frac{k\pi}{n}}}{n}$

Scanné avec CamScanner

On conclut que $F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{X - x_k} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}}$

→ Exemple $n = 3$.

$$\frac{1}{X^3-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{X-1} + \frac{j}{X-j} + \frac{j^2}{X-j^2}\right)$$

2- $F = \frac{X^{n-1}}{X^n - 1}$

Les pôles sont les racines n-ièmes de 1. Ils sont toutes simples et la fraction F est irréductible.

Donc $F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{c_k}{X - x_k}$, où $x_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} / k = 0, 1, \ldots, n-1$

et $c_k = \frac{P(x_k)}{Q'(x_k)}$ avec $P(X) = X^{n-1}$ et $Q'(X) = nX^{n-1}$

Donc $F = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{X - e^{i\frac{2k\pi}{n}}}$

3- $F = \frac{1}{(X-1)(X^n-1)}$

F admet 1 comme pôle double et $x_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} / 0 < k \leq n-1$ comme pôles simples.

. On calcule le coefficient $\frac{1}{(X-1)^2}$:

on a $\frac{1}{(X-1)^2(X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X + 1)} = \frac{\alpha}{(X-1)^2} + Q(X)$ où 1 n'est pas pôle double de Q.

On multiplie par $(X-1)^2$ on aura $\alpha = \frac{1}{n}$.

. le coefficient devant $\frac{1}{X - x_k}$, pour $0 \leq k \leq n-1$

est $c_k = \frac{P(x_k)}{Q'(x_k)} = \frac{1}{x_k^n - 1 + n(x_k - 1)x_k^{n-1}} = \frac{1}{n(x_k - 1)\frac{1}{x_k}}$

$= \frac{x_k}{n(x_k - 1)}$

Scanné avec CamScanner

Pour calculer le coefficient devant $\frac{1}{X-1}$, on écrit :

$$\frac{1}{(X-1)^2(X^{n-1}+X^{n-2}+\dots+X+1)} - \frac{1/n}{(X-1)^2} = \frac{\beta}{X-1} + C(X) \text{ où } 1$$

n'est pas un pôle de C on aura donc :

$$\frac{n-(X^{n-1}+X^{n-2}+\dots+X+1)}{n(X-1)^2(X^{n-1}+X^{n-2}+\dots+X+1)} = -\frac{(X^{n-1}-1)+(X^{n-2}-1)+\dots+(X-1)}{n(X-1)^2(X^{n-1}+X^{n-2}+\dots+X+1)}$$

$$= -\frac{(X^{n-2}+\dots+X+1)+(X^{n-3}+\dots+X+1)+\dots+(X+1)+1}{n(X-1)(X^{n-1}+X^{n-2}+\dots+X+1)}$$

On multiplie par $(X-1)$ et on remplace X par 1

On trouve que $\beta = -\frac{(n-1)+(n-2)+\dots+2+1}{n \cdot n} = -\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{n^2}$

d'où $\beta = \frac{1-n}{2n}$ donc $F = \frac{1-n}{2n(n-1)} + \frac{1}{n(X-1)^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{n(x_k-1)} \frac{1}{X-x_k}$

Exercice 3

1- Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ la fraction rationnelle

$$F = \frac{1}{X^2+1} = \frac{a}{X-i} + \frac{b}{X+i}$$

- $(X-i)\frac{1}{X^2+1} = a + \frac{(X-i)b}{X+i} \Rightarrow \frac{1}{X+i} = a + \frac{(X-i)b}{X+i}$

Pour $X=i$ on a $a = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i$.

- $(X+i) = \frac{a(X+i)}{X-i} + b \Rightarrow \frac{1}{X-i} = b + \frac{a(X+i)}{X-i}$

Pour $X=-i$ on a $b = \frac{1}{-2i} = \frac{1}{2}i$.

d'où $\frac{1}{X^2+1} = \frac{-i}{2(X-i)} + \frac{i}{2(X+i)}$

2) En déduire $F^{(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{d^n}{dX^n}\left(\frac{1}{X^2+1}\right) = (-1)^n n! \frac{(X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}}{2i(X^2+1)^{n+1}}$$

Scanné avec CamScanner

3 — $\forall n \in \mathbb{N}^*$, trouver $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tq $F^{(n)} = \dfrac{P_n}{(X^2+1)^{n+1}}$

$$(X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} X^{n+1-k} \left(i^k - (-i)^k\right)$$

or $i^k - (-i)^k = 0$ si k est pair. Et $(-1)^k - (-1)^k = (-1)^p 2i$.

si $k = 2p+1$. Ainsi $(X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1} = 2i \sum_{p=0}^{[n/2]} \binom{n+1}{2p+1} X^{n-2p} (-1)^p$

Et donc $\dfrac{d^n}{dx^n}\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right) = \dfrac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{n+1}} \sum_{p=0}^{[n/2]} \binom{n+1}{2p+1} (-1)^p X^{n-2p}$

Scanné avec CamScanner